JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 7, 265–280 (1973)

Sätze vom Müntz-Jackson-Typ für $L^2(0, 1)$

WILHELM FORST

Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen, 7400 Tübingen, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received December 1, 1970

In [3] werden allgemeine Bedingungen dafür angegeben, daß für ein Funktionensystem aus $L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ bzw. $C[a, b]$ ein Satz vom Jackson-Typ existiert. Dabei besteht das Hauptproblem bei der Herleitung solcher Sätze in der Berechnung des Approximationsgrades gewisser Funktionsklassen.

Speziell für die in [2] betrachteten Funktionensysteme sollen nun explizite quantitative Approximierbarkeitsaussagen gemacht werden. Untersuchungen dieser Art haben Dimsdale [1], v. Golitschek [5, 6, 7, 8] sowie Ganelius und Westlund [4] für den Raum $C[0, 1]$ angestellt. Letztere knüpfen an eine interessante Arbeit von Newman [10] an, in der ein Satz vom Müntz-Jackson-Typ für $L^2(0, 1)$ bewiesen wird. Ganelius und Westlund [4] machen jedoch keine Aussagen darüber, ob die von ihnen hergeleiteten Abschätzungen bestmöglich sind.

In dieser Arbeit führen wir die Newmanschen Überlegungen für den Raum $L^2(0, 1)$ fort. Es ist uns dabei nicht gelungen, derartige Approximierbarkeitsaussagen in voller Allgemeinheit herzuleiten. Aus diesem Grunde beschränken wir uns auf Spezialfälle: Als erstes verwenden wir Exponentenfolgen $\{\lambda_\nu\}_0^\infty$ mit $1 \leqslant \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} \leqslant 2$ $(\nu = 1, 2, 3,...)$ und erhalten so insbesondere einen Jackson-Satz für $L^2(0, 1)$. Ferner betrachten wir Exponentenfolgen, an die wir ähnliche Bedingungen wie Newman [10] stellen; schließlich beweisen wir noch für beschränkte Exponentenfolgen einen Satz vom Müntz-Jackson-Typ.

1. DIE SÄTZE VON MÜNTZ

Sei $\{\lambda_k\}_0^\infty$ eine Folge von reellen Zahlen; hierbei ist zugelassen, daß eine Zahl unendlich oft in der Folge vorkommt. Gehören zu dem endlichen Abschnitt $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ genau m verschiedene Zahlen $\tau_1, ..., \tau_m$ mit den

Vielfachheiten $\nu_1, \ldots, \nu_m$, so verstehen wir unter U_n die Menge aller Funktionen der Form

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\nu_k - 1} c_{kl} (\log t)^l \, t^{\tau_k}$$

und unter U die Vereinigung aller U_n.

Mittels der Transformation $x = \log(1/t)$, kann man aus [2], Satz 3.1 bzw. [2], Satz 3.2 die folgenden Sätze ableiten.

SATZ 1. *Sei X der komplexe Raum $L^p(0, 1)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ oder $C'[0, 1]$ und $\{\lambda_k\}_0^\infty$ eine Folge von reellen Zahlen mit $\lambda_k + (1/p) > 0$ bzw. $\lambda_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann ist U genau dann dicht in X, wenn*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k + (1/p)}{1 + \lambda_k^2} = \infty$$

bzw.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k^2} = \infty$$

ist.

SATZ 2. *Sei X der komplexe Raum $L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ oder $C[a, b]$ $(0 < a < b)$ und $\{\lambda_k\}_0^\infty$ eine Folge von reellen Zahlen. Dann ist U genau dann dicht in X, wenn*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \lambda_k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty$$

gilt oder unendlich oft $\lambda_k = 0$ ist.

Für den Fall $p = 2$ und spezielle Typen von Exponentenfolgen $\{\lambda_k\}_0^\infty$ wird im folgenden die qualitative Approximierbarkeitsaussage von Satz 1 zu einer quantitativen verschärft.

2. BERECHNUNG DES APPROXIMATIONSGRADES

Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen aus [3]. J bezeichne diejenige lineare Abbildung von $L^2(0, 1)$ in $L_1^2(0, 1)$, welche $g \in L^2(0, 1)$ die durch

$$(Jg)(x) := \int_0^x g(t)\, dt \qquad \text{für} \quad x \in [0, 1]$$

definierte Funktion Jg zuordnet. Für $l \geqslant 0$ gilt dann

$$(J^{l+1}g)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^l}{l!} g(t)\, dt. \tag{1}$$

Ist U ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(0,1)$ mit $h_0, \ldots, h_k \in U$ ($h_\kappa(x) = x^\kappa$), so ist für $g \in U^\perp$ und $0 \leqslant l \leqslant k$ wegen (1)

$$(J^{l+1}g)(0) = (J^{l+1}g)(1) = 0. \tag{2}$$

Da für den Approximationsgrad von $\mathbb{F}_k^2$ bezüglich U

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U) = \sup_{f \in \mathbb{F}_k^2} \sup_{g \in U^\perp \setminus \{0\}} \left(\frac{\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt}{\| g \|_2} \right) \tag{3}$$

und für $f \in \mathbb{F}_k^2$, $g \in U^\perp$ wegen (2)

$$\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt = (-1)^{k+1} \int_0^1 f^{(k+1)}(t)(J^{k+1}g)(t)\, dt \tag{4}$$

gilt, ergibt sich aus (3) und (4)

HILFSSATZ 3.

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U) = \sup_{g \in U^\perp \setminus \{0\}} \frac{\| J^{k+1} g \|_2}{\| g \|_2}.$$

Für die weiteren Überlegungen machen wir nun die generelle Voraussetzung, daß $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ ($k \leqslant n$) eine endliche Folge von reellen Zahlen ist mit $\lambda_\kappa = \kappa$ ($\kappa = 0, 1, \ldots, k$) und $\lambda_\kappa > -\frac{1}{2}$ ($\kappa = k+1, \ldots, n$).

Gehören zu Λ genau m verschiedene Zahlen $\tau_1, \ldots, \tau_m$ mit den Vielfachheiten $\nu_1, \ldots, \nu_m$, so bezeichnet U_Λ die Menge der Funktionen

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{\nu_i - 1} c_{ij} (\log x)^j\, x^{\tau_i}.$$

In diesem Spezialfall kann man über den Approximationsgrad mehr aussagen.

SATZ 4. *Es ist*

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda)^2 = \sup_{G \in \mathbb{P} \setminus \{0\}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} | G(k+1+ix)|^2\, H_{k,\Lambda}(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} | G(ix)|^2\, dx}, \tag{5}$$

wobei $\mathbb{P}$ *die Paley-Wiener-Klasse der rechten Halbebene bedeutet und*

$$H_{k,\Lambda}(x) = \frac{\prod_{\kappa=k+1}^{n} (x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2)}{\prod_{\kappa=0}^{n} (x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2)}$$

ist.

Bemerkung. Für $k = 0$ findet man dieses Resultat bei Newman [10].

Beweis. Für $g \in U_\Lambda^\perp$ ist nach [11], Satz V die durch

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1/2} g(t)\, dt \qquad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

definierte Funktion F aus $\mathbb{P}$ mit (evtl. mehrfachen) Nullstellen in $\lambda_\kappa + \frac{1}{2}$ ($\kappa = 0, 1, \ldots, n$), und es gilt nach dem Parsevalschen Satz

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | F(ix)|^2\, dx = \| g \|_2^2 . \tag{6}$$

Unter Beachtung von (2) liefert partielle Integration

$$F(z) = (-1)^{k+1} \prod_{\kappa=0}^{k} (z - \kappa - \tfrac{1}{2}) \int_0^1 t^{z-k-3/2} (J^{k+1} g)(t)\, dt.$$

Daraus ergibt sich mit nochmaliger Anwendung des Parsevalschen Satzes auf

$$(-1)^{k+1} \frac{F(z + k + 1)}{\prod_{\kappa=0}^{k} (z - \kappa + k + \frac{1}{2})}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{| F(k + 1 + ix)|^2}{\prod_{\kappa=0}^{k} (x^2 + (\kappa - k - \frac{1}{2})^2)}\, dx = \| J^{k+1} g \|_2^2 . \tag{7}$$

Die mittels des Blaschke-Produktes

$$B(z) = \prod_{\kappa=0}^{n} \left(\frac{z - \lambda_\kappa - \frac{1}{2}}{z + \lambda_\kappa + \frac{1}{2}} \right)$$

definierte Funktion

$$G(z) = \frac{F(z)}{B(z)}$$

gehört zu $\mathbb{P}$. Wegen

$$| B(ix)|^2 = 1$$

folgt aus (6)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(ix)|^2\,dx = \|g\|_2^2 \tag{8}$$

und wegen

$$|B(k+1+ix)|^2 = \prod_{\kappa=0}^{n}\left(\frac{x^2+(\lambda_\kappa-k-\frac{1}{2})^2}{x^2+(\lambda_\kappa+k+\frac{3}{2})^2}\right)$$

aus (7)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(k+1+ix)|^2\, H_{k,\Lambda}(x)\,dx = \|J^{k+1}g\|_2^2\,. \tag{9}$$

Mit (8), (9), und Hilfssatz 3 ergibt sich dann (5).

Für Funktionen $G \in \mathbb{P}$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(k+1+ix)|^2\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |G(ix)|^2\,dx;$$

deshalb folgt aus Satz 4

KOROLLAR 5.

$$\delta(\mathbb{F}_k^2\,,\,U_\Lambda)^2 \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} H_{k,\Lambda}(x).$$

Bemerkung. Mittels Korollar 5 kann der Approximationsgrad nach oben abgeschätzt werden; Abschätzungen nach unten sind nach Satz 4 mittels dem Spezialfall angepaßter $G \in \mathbb{P}$ möglich.

3. Verallgemeinerung der Newmanschen Approximierbarkeitsaussagen

Wir bestimmen eine obere Schranke für

$$H_{k,\Lambda}(x) = \frac{\prod_{\kappa=k+1}^{n}(x^2+(\lambda_\kappa-k-\frac{1}{2})^2)}{\prod_{\kappa=0}^{n}(x^2+(\lambda_\kappa+k+\frac{3}{2})^2)}$$

$$= \frac{1}{\prod_{\kappa=n-k}^{n}(x^2+(\lambda_\kappa+k+\frac{3}{2})^2)}\prod_{\kappa=k+1}^{n}\left(\frac{x^2+(\lambda_\kappa-k-\frac{1}{2})^2}{x^2+(\lambda_{\kappa-k-1}+k+\frac{3}{2})^2}\right).$$

Bezeichnet $I_{k,\Lambda}$ die Menge

$$\{\kappa \mid k+1 \leqslant \kappa \leqslant n \wedge |\lambda_\kappa - k - \tfrac{1}{2}| \geqslant |\lambda_{\kappa-k-1}+k+\tfrac{3}{2}|\},$$

so erhalten wir wegen

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2} \leqslant \frac{1}{(\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2}$$

und

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2}{x^2 + (\lambda_{\kappa-k-1} + k + \frac{3}{2})^2} \leqslant \begin{cases} \dfrac{(\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2}{(\lambda_{\kappa-k-1} + k + \frac{3}{2})^2}, & \text{falls } \kappa \in I_{k,\Lambda} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Abschätzung

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} H_{k,\Lambda}(x) \leqslant \frac{1}{\prod_{\kappa=n-k}^{n} (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2} \prod_{\kappa\in I_{k,\Lambda}} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_{\kappa-k-1} + k + \frac{3}{2}}\right)^2.$$

Aus Korollar 5 ergibt sich somit Folgerung 6.

Folgerung 6. *Es ist*

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \leqslant \tilde{\eta}_{k,\Lambda}$$

mit

$$\tilde{\eta}_{k,\Lambda} := \frac{1}{\prod_{\kappa=n-k}^{n} (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})} \prod_{\kappa\in I_{k,\Lambda}} \left|\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_{\kappa-k-1} + k + \frac{3}{2}}\right|.$$

Wir untersuchen nun zwei Spezialfälle.

Fall 1. Es gelte $1 \leqslant \lambda_\kappa - \lambda_{\kappa-1} \leqslant 2$ $(\kappa = k+1,\ldots, n)$. Dann enthält $I_{k,\Lambda}$ nur solche $\kappa \geqslant k+1$, für die

$$\lambda_\kappa - k - \tfrac{1}{2} = \lambda_{\kappa-k-1} + k + \tfrac{3}{2}$$

ist. Wegen $\lambda_\kappa \geqslant \kappa$ für $\kappa \geqslant 0$ ergibt sich somit nach Folgerung 6

$$\tilde{\eta}_{k,\Lambda} = \frac{1}{\prod_{\kappa=n-k}^{n} (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})} \leqslant \frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{k} (n + \kappa + 1)}.$$

Wir schätzen nun $\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda)$ nach unten ab. Dazu benötigen wir folgende Formel aus [9].

Hilfssatz 7.

$$\int_0^\infty \frac{x^{\kappa-1}}{(cx^\alpha + d)^\lambda}\, dx = \frac{B[(\kappa/\alpha), \lambda - (\kappa/\alpha)]}{\alpha c^{\kappa/\alpha} d^{\lambda-\kappa/\alpha}}$$
$$(\alpha > 0, \quad \lambda > (\kappa/\alpha) > 0, \quad cd > 0).$$

Für $n \geqslant 2k + 1$ gilt

$$H_{k,\Lambda}(x) = \frac{\prod_{\kappa=k+1}^{n} (x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2)}{\prod_{\kappa=0}^{n} (x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2)}$$

$$= \frac{\prod_{\kappa=k+1}^{2k+1} (x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2)}{\prod_{\kappa=n-2k-1}^{n} (x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2)}$$

$$\times \prod_{\kappa=2k+2}^{n} \left(\frac{x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2}{x^2 + (\lambda_{\kappa-2k-2} + k + \frac{3}{2})^2} \right).$$

Wegen

$$\lambda_\kappa - k - \tfrac{1}{2} \geqslant \lambda_{\kappa-2k-2} + k + \tfrac{3}{2}$$

und

$$\lambda_\kappa \leqslant k + 2(\kappa - k) \qquad (\kappa \geqslant k)$$

kann $H_{k,\Lambda}$ wie folgt durch

$$H_{k,\Lambda}(x) \geqslant \frac{x^{2k+2}}{(x^2 + (2n + 2)^2)^{2k+2}}$$

nach unten abgeschätzt werden. Für die Funktion

$$G(z) = \frac{1}{z + n + 1}$$

aus $\mathbb{P}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(ix)|^2 \, dx = \frac{\pi}{n + 1}. \tag{10}$$

Aus

$$| G(k + 1 + ix)|^2 = \frac{1}{x^2 + (n + k + 2)^2} \geqslant \frac{1}{x^2 + (2n + 2)^2}$$

folgt die Abschätzung

$$| G(k + 1 + ix)|^2 \, H_{k,\Lambda}(x) \geqslant \frac{x^{2k+2}}{(x^2 + (2n + 2)^2)^{2k+3}}$$

und hieraus mit Hilfssatz 7

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(k + 1 + ix)|^2 \, H_{k,\Lambda}(x) \, dx \geqslant \frac{B(k + \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2})}{(2n + 2)^{2k+3}}. \tag{11}$$

Mit Satz 4 ergibt sich aus (10) und (11) die Ungleichung

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda)^2 \geqslant \frac{B(k+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2})}{2\pi} \frac{1}{(2n+2)^{2k+2}}.$$

Folglich gibt es eine Konstante $c_k > 0$, so daß für $n \geqslant k$

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \geqslant \frac{c_k}{(n+1)^{k+1}}$$

ist.

Wir fassen die vorangehenden Ergebnisse noch einmal zusammen und erhalten aus [3], Satz 7 mit

$$h = \frac{1}{n+k+1}$$

folgendes Resultat.

Satz 8. *Sei* $1 \leqslant \lambda_\kappa - \lambda_{\kappa-1} \leqslant 2$ $(\kappa = k+1, \ldots, n)$. *Dann gibt es eine Konstante* $c_k > 0$, *so daß*

$$\frac{c_k}{(n+1)^{k+1}} \leqslant \delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \leqslant \frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{k} (n+1+\kappa)}$$

ist. Ferner gilt für alle $f \in L_k^2(0, 1)$ *die Abschätzung*

$$\delta(f, U_\Lambda) \leqslant \frac{2}{\prod_{\kappa=1}^{k} (n+\kappa)} \omega_2 \left(f^{(k)}, \frac{1}{n+k+1}\right).$$

Bemerkung. Satz 8 enthält insbesondere eine zum klassischen Jackson-Satz analoge Aussage für $L^2(0, 1)$.

Fall 2. Es gelte $\lambda_\kappa - \lambda_{\kappa-1} \geqslant 2$ $(\kappa = k+1, \ldots, n)$. Für $\kappa \geqslant 2k+1$ ist dann $\lambda_\kappa - \lambda_{\kappa-k-1} \geqslant 2k+2$; folglich enthält $I_{k,\Lambda}$ die Zahlen $2k+1, \ldots, n$. Aus Folgerung 6 ergibt sich dann wegen

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{k,\Lambda} &= \frac{1}{\prod_{\kappa=n-k}^{n} (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})} \\ &\quad \times \prod_{\substack{\kappa \in I_{k,\Lambda} \\ \kappa \leqslant 2k}} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_{\kappa-k-1} + k + \frac{3}{2}}\right) \prod_{\kappa=2k+1}^{n} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_{\kappa-k-1} + k + \frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\prod_{\kappa=k}^{2k} (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})} \prod_{\substack{\kappa \in I_{k,\Lambda} \\ \kappa \leqslant 2k}} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_{\kappa-k-1} + k + \frac{3}{2}}\right) \prod_{\kappa=2k+1}^{n} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2}}\right)\end{aligned}$$

die beiderseitige Abschätzung

$$\frac{1}{\prod_{\kappa=k}^{2k}(\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})} \prod_{\kappa=2k+1}^{n} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2}}\right) \leqslant \tilde{\eta}_{k,\Lambda} \leqslant \prod_{\kappa=2k+1}^{n} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2}}\right); \tag{12}$$

falls $k \geqslant 1$ ist, gilt ferner

$$\frac{\tilde{\eta}_{k,\Lambda}}{\tilde{\eta}_{k-1,\Lambda}} \leqslant \prod_{\kappa=k+1}^{2k} (\lambda_\kappa + k + \tfrac{1}{2}) \prod_{\kappa=2k+1}^{n} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa - k + \frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\lambda_\kappa + k + \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2}}\right).$$

Bemerkung 1. Falls das Dichtheitskriterium aus Satz 1 erfüllt ist, konvergieren

$$\tilde{\eta}_{k,\Lambda}\,,\ \tilde{\eta}_{k-1,\Lambda} \text{ bzw. } \frac{\tilde{\eta}_{k,\Lambda}}{\tilde{\eta}_{k-1,\Lambda}}$$

für $n \to \infty$ gegen 0.

Bemerkung 2. Nehmen wir an, daß für die Exponenten $\lambda_{\kappa+1} - \lambda_\kappa = d > 0$ für $\kappa \geqslant k$ gilt, so ergibt sich mit Satz 8 im Falle $1 \leqslant d \leqslant 2$

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \leqslant \frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{k}(n+1+\kappa)} = \mathcal{O}(n^{-(k+1)})$$

und mit (12) im Falle $d \geqslant 2$

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \leqslant \prod_{\kappa=2k+1}^{n} \left(\frac{d(\kappa-k) - \frac{1}{2}}{d(\kappa-k) + 2k + \frac{3}{2}}\right) = \mathcal{O}(n^{-2(k+1)/d}).$$

Bemerkenswert ist daran, daß die Größenordnung des Approximationsgrades davon unbeeinflußt bleibt, ob man für $\kappa \geqslant k$ jede natürliche Zahl oder nur jede zweite natürliche Zahl als Exponenten verwendet. Nimmt man jedoch nur jede dritte natürliche Zahl, so hat das Funktionensystem schlechtere Approximationseigenschaften.

Wir zeigen nun, daß auch im Falle 2 die Abschätzung des Approximationsgrades größenordnungsmäßig bestmöglich ist. Für

$$H_{k,\Lambda}(x) = \frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{k}(x^2 + (\kappa + k + \frac{3}{2})^2)} \prod_{\kappa=k+1}^{n} \left(\frac{x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2}{x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2}\right)$$

gilt wegen

$$|\lambda_\kappa - k - \tfrac{1}{2}| \leqslant \lambda_\kappa + k + \tfrac{3}{2} \qquad \text{für} \quad \kappa \geqslant k+1$$

$$H_{k,\Lambda}(x) \geqslant \prod_{\kappa=k+1}^{n} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2}}\right)^2 \frac{1}{(x^2 + (2k+2)^2)^{k+1}}\,.$$

Mit

$$G(z) = \frac{1}{z + k + 1}$$

folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, G(ix)|^2 \, dx = \frac{\pi}{k + 1} ;$$

aufgrund der Ungleichung

$$|\, G(k + 1 + ix)|^2 \, H_{k,\Lambda}(x) \geqslant \prod_{\kappa=k+1}^{n} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2}}\right)^2 \frac{1}{(x^2 + (2k + 2)^2)^{k+2}}$$

ergibt sich ferner mit Hilfssatz 7

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, G(k + 1 + ix)|^2 \, H_{k,\Lambda}(x) \, dx \geqslant \frac{B(\frac{1}{2}, k + \frac{3}{2})}{(2k + 2)^{2k+3}} \prod_{\kappa=k+1}^{n} \left(\frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2}}\right)^2 .$$

Folglich gilt

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \geqslant \frac{1}{(2k + 2)^{k+1}} \sqrt{\frac{B(\frac{1}{2}, k + \frac{3}{2})}{2\pi}} \prod_{\kappa=k+1}^{n} \left| \frac{\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2}}{\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2}} \right| ,$$

d.h. die im Falle 2 gewonnenen Abschätzungen sind scharf.

Zusammenfassend ergibt sich aus [3], Satz 7 mit

$$h = \tilde{\eta}_{0,\Lambda} \qquad \text{bzw.} \qquad h = \frac{\tilde{\eta}_{k,\Lambda}}{\tilde{\eta}_{k-1,\Lambda}}$$

der folgende.

SATZ 9. *Es sei* $\lambda_\kappa - \lambda_{\kappa-1} \geqslant 2$ $(\kappa = k + 1, \ldots, n)$. *Dann gibt es eine Konstante* $c_k > 0$ *mit*

$$c_k \tilde{\eta}_{k,\Lambda} \leqslant \delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \leqslant \tilde{\eta}_{k,\Lambda} .$$

Ferner gilt für alle $f \in L_k^2(0, 1)$ *im Falle* $k = 0$

$$\delta(f, U_\Lambda) \leqslant 2\omega_2(f, \tilde{\eta}_{0,\Lambda})$$

bzw. im Falle $k \geqslant 1$

$$\delta(f, U_\Lambda) \leqslant 2\tilde{\eta}_{k-1,\Lambda}\omega_2 \left(f^{(k)}, \frac{\tilde{\eta}_{k,\Lambda}}{\tilde{\eta}_{k-1,\Lambda}}\right).$$

Bemerkung. Für $k = 0$ beinhaltet Satz 9 den Müntz-Jackson-Satz von Newman [10].

4. Ein Müntz-Jackson-Satz für beschränkte Exponentenfolgen

Für beschränkte Exponentenfolgen kann man den Approximationsgrad wie folgt nach oben abschätzen.

Hilfssatz 10. *Es sei $\lambda_\nu \leqslant \bar\lambda$ $(\nu = 0, 1,..., n)$. Bezeichnet $S_{k,\Lambda}$ die Partialsumme*

$$\sum_{\kappa=k+1}^{n} (\lambda_\kappa + \tfrac{1}{2}),$$

dann gibt es eine Konstante $\bar c_k = \bar c_k(\bar\lambda) > 0$ mit

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \leqslant \frac{\bar c_k}{S_{k,\Lambda}^{(k+1)/2}} \qquad \textit{für} \quad n > k.$$

Beweis. Die Funktion

$$H_{k,\Lambda}(x) = \frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{k} (x^2 + (\kappa + k + \frac{3}{2})^2)} \prod_{\kappa=k+1}^{n} \left(\frac{x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2}{x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2}\right)$$

kann wegen

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2}{x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2} &= 1 - \frac{4(k+1)(\lambda_\kappa + \frac{1}{2})}{x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2} \\ &\leqslant 1 - \frac{4(k+1)(\lambda_\kappa + \frac{1}{2})}{x^2 + (2\bar\lambda + 2)^2}\end{aligned}$$

wie folgt abgeschätzt werden:

$$H_{k,\Lambda}(x) \leqslant \frac{1}{(x^2 + (k+1)^2)^{k+1}} \prod_{\kappa=k+1}^{n} \left(1 - \frac{4(k+1)(\lambda_\kappa + \frac{1}{2})}{x^2 + 4(\bar\lambda + 1)^2}\right). \tag{13}$$

Aus (13) folgt dann mit der Hilfsfunktion

$$h_k(x) := \frac{1}{(x^2 + (k+1)^2)^{k+1}} \exp\left(- \frac{4(k+1)\, S_{k,\Lambda}}{x^2 + 4(\bar\lambda + 1)^2}\right)$$

die Ungleichung

$$H_{k,\Lambda}(x) \leqslant h_k(x). \tag{14}$$

Wir zeigen nun im folgenden, daß

$$H_{k,\Lambda}(x) \leqslant \frac{\bar c_k^2}{S_{k,\Lambda}^{k+1}} \qquad \text{für} \quad n > k \tag{15}$$

gilt mit

$$\bar{c}_k := \left(\frac{2(\bar{\lambda} + 1)^2}{(k+1)^2}\right)^{k+1}. \tag{16}$$

Falls

$$S_{k,\Lambda} \leqslant \frac{4(\bar{\lambda} + 1)^4}{(k+1)^2} \tag{17}$$

ist, folgt aus (13)

$$H_{k,\Lambda}(x) \leqslant \frac{1}{(k+1)^{2(k+1)}} \tag{18}$$

und aus (16) und (17)

$$\frac{\bar{c}_k^2}{S_{k,\Lambda}^{k+1}} \geqslant \frac{1}{(k+1)^{2(k+1)}}. \tag{19}$$

Aus (18) und (19) ergibt sich (15). Im Falle

$$S_{k,\Lambda} > \frac{4(\bar{\lambda} + 1)^4}{(k+1)^2} \tag{20}$$

bestimmen wir eine obere Schranke für $h_k(x)$. Es ist

$$\frac{h_k'(x)}{h_k(x)} = 2x\left(-\frac{k+1}{x^2 + (k+1)^2} + \frac{4(k+1)\,S_{k,\Lambda}}{(x^2 + 4(\bar{\lambda}+1)^2)^2}\right).$$

Mit (20) folgt

$$\frac{h_k''(0)}{h_k(0)} = 2\left(-\frac{1}{k+1} + \frac{4(k+1)\,S_{k,\Lambda}}{16(\bar{\lambda}+1)^4}\right) > 0.$$

Deshalb hat h_k bei $x = 0$ ein lokales Minimum; folglich gilt für die Maximumstelle x_0

$$\frac{1}{x_0^2 + (k+1)^2} = \frac{4S_{k,\Lambda}}{(x_0^2 + 4(\bar{\lambda}+1)^2)^2}. \tag{21}$$

Bezeichnet $\bar{h}_k$ die Funktion

$$\bar{h}_k(x) := \left(\frac{4S_{k,\Lambda}}{(x^2 + 4(\bar{\lambda}+1)^2)^2}\right)^{k+1} \exp\left(-\frac{4(k+1)\,S_{k,\Lambda}}{x^2 + 4(\bar{\lambda}+1)^2}\right),$$

so gilt wegen (21)

$$\max_{-\infty<x<\infty} h_k(x) = h_k(x_0) = \bar{h}_k(x_0) \leqslant \max_{-\infty<x<\infty} \bar{h}_k(x).$$

Wir schätzen nun $\bar{h}_k$ nach oben ab. Es ist

$$\frac{\bar{h}_k'(x)}{\bar{h}_k(x)} = 2x\left(-\frac{2(k+1)}{x^2+4(\bar{\lambda}+1)^2}+\frac{4(k+1)\,S_{k,\Lambda}}{(x^2+4(\bar{\lambda}+1)^2)^2}\right).$$

An der Stelle $x = 0$ hat $\bar{h}_k$ wegen

$$\frac{\bar{h}_k''(0)}{\bar{h}_k(0)} = 2\left(-\frac{2(k+1)}{4(\bar{\lambda}+1)^2}+\frac{4(k+1)\,S_{k,\Lambda}}{16(\bar{\lambda}+1)^4}\right) > 0 \tag{22}$$

ein lokales Minimum. (22) folgt aus

$$S_{k,\Lambda} > 4(\bar{\lambda}+1)^2$$

und letzteres wegen $\bar{\lambda} \geqslant k$ aus (20). Für die Maximumstelle $\bar{x}_0$ gilt also

$$\bar{x}_0^2 + 4(\bar{\lambda}+1)^2 = 2S_{k,\Lambda}\,.$$

Folglich ist

$$H_{k,\Lambda}(x) \leqslant \bar{h}_k(\bar{x}_0) = \left(\frac{1}{e^2 S_{k,\Lambda}}\right)^{k+1}. \tag{23}$$

Da sich aus (16) wegen $\bar{\lambda} \geqslant k$

$$\bar{c}_k \geqslant 2^{k+1} \tag{24}$$

ergibt, erhalten wir aus (23) und (24) die Abschätzung (15).

Bemerkung 1. Ist das Dichtheitskriterium von Satz 1 erfüllt, so gilt

$$S_{k,\Lambda} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Bemerkung 2. Gilt $-\frac{1}{2} < \underline{\lambda} \leqslant \lambda_\nu \leqslant \bar{\lambda}$ $(\nu = 0, 1,\dots, n)$, so ist

$$S_{k,\Lambda} \geqslant (n-k)(\underline{\lambda}+\tfrac{1}{2});$$

wir erhalten dann die Abschätzung

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \leqslant \frac{\bar{c}_k}{((n-k)(\underline{\lambda}+\frac{1}{2}))^{(k+1)/2}}\,.$$

Für diesen Spezialfall zeigen wir in Hilfssatz 12, daß die Abschätzung des Approximationsgrades nahezu scharf ist.

Aus [3], Satz 7 und Hilfssatz 10 folgt mit $h = 1/S_{k,\Lambda}^{1/2}$

SATZ 11. *Sei $\lambda_\nu \leqslant \bar\lambda$ $(\nu = 0, 1,..., n)$. Dann gibt es eine Konstante $c_k = c_k(\bar\lambda) > 0$, so daß für alle $f \in L_k^2(0, 1)$ und $n > k$ die Abschätzung*

$$\delta(f, U_\Lambda) \leqslant \frac{c_k}{S_{k,\Lambda}^{k/2}}\, \omega_2\left(f^{(k)}, \frac{1}{S_{k,\Lambda}^{1/2}}\right)$$

gilt.

Abschließend beweisen wir eine untere Abschätzung des Approximationsgrades.

HILFSSATZ 12. *Sei $\lambda_\nu \leqslant \bar\lambda$ $(\nu = 0, 1,..., n)$. Dann gibt es eine Konstante $\underline{c}_k = \underline{c}_k(\bar\lambda) > 0$ mit*

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda) \geqslant \frac{\underline{c}_k}{(\log(n+1)\prod_{\kappa=0}^{k}(n+1-\kappa))^{1/2}}\,.$$

Beweis. Für

$$H_{k,\Lambda}(x) = \frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{k}(x^2 + (\kappa + k + \frac{3}{2})^2)} \prod_{\kappa=k+1}^{n} \left(\frac{x^2 + (\lambda_\kappa - k - \frac{1}{2})^2}{x^2 + (\lambda_\kappa + k + \frac{3}{2})^2}\right)$$

gilt die Abschätzung

$$H_{k,\Lambda}(x) \geqslant \frac{1}{(x^2 + (2k+2)^2)^{k+1}} \left(\frac{x^2}{x^2 + (\bar\lambda + k + 2)^2}\right)^{n-k}.$$

Mit Hilfssatz 7 folgt dann für

$$G(z) = \frac{(z + k + 1)^{k+1}}{(z + \bar\lambda + 1)^{k+1+\alpha}} \qquad \left(\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log(n+1)}\right)$$

wegen

$$| G(ix)|^2 \leqslant \frac{1}{(x^2 + (\bar\lambda + 1)^2)^\alpha}$$

die Abschätzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(ix)|^2\, dx \leqslant \frac{B(\frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2})}{(\bar\lambda + 1)^{2\alpha-1}} \leqslant B(\tfrac{1}{2}, \alpha - \tfrac{1}{2})$$

und wegen

$$| G(k + 1 + ix)|^2\, H_{k,\Lambda}(x) \geqslant \frac{x^{2(n-k)}}{(x^2 + (\bar\lambda + k + 2)^2)^{n+1+\alpha}}$$

die Abschätzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(k+1+ix)|^2 H_{k,\Lambda}(x)\, dx \geqslant \frac{B(n-k+\frac{1}{2}, k+\alpha+\frac{1}{2})}{(\bar{\lambda}+k+2)^{2(k+\alpha)+1}}.$$

Also gilt nach Satz 4

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda)^2 \geqslant \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{(\bar{\lambda}+k+2)^{2(k+\alpha)+1}} \frac{B(n-k+\frac{1}{2}, k+\alpha+\frac{1}{2})}{(\alpha-\frac{1}{2})\, B(\frac{1}{2}, \alpha-\frac{1}{2})}. \tag{25}$$

Beachten wir, daß

$$\begin{aligned}\frac{B(n-k+\frac{1}{2}, k+\alpha+\frac{1}{2})}{(\alpha-\frac{1}{2})\, B(\frac{1}{2}, \alpha-\frac{1}{2})} &= \frac{\prod_{\kappa=1}^{k} (\alpha+\kappa-\frac{1}{2})}{\prod_{\kappa=0}^{k} (n-k+\kappa+\frac{1}{2})} \prod_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu+\frac{1}{2}}{\nu+\alpha}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2\alpha} \frac{k!}{\prod_{\kappa=0}^{k} (n+1-\kappa)} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1/2}}\end{aligned}$$

und

$$\alpha \leqslant 2$$

ist, so ergibt sich aus (25)

$$\delta(\mathbb{F}_k^2, U_\Lambda)^2 \geqslant \frac{k!}{4e(\bar{\lambda}+k+2)^{2(k+2)+1}} \frac{1}{\log(n+1) \prod_{\kappa=0}^{k} (n+1-\kappa)}.$$

Anerkennung

Die vorliegende Arbeit ist Teil einer Untersuchung, die von A. Schönhage angeregt wurde. Für sein Interesse an ihrem Fortgang sowie seine zahlreichen fördernden Hinweise sei ihm herzlich gedankt.

Literatur

1. B. Dimsdale, Approximation of continuous functions by means of lacunary polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 608–617.
2. W. Forst, Ein funktionentheoretischer Beweis des Satzes von Müntz, *Manuscripta Mathematica* **3** (1970), 357–374.
3. W. Forst, Über einen allgemeinen Satz vom Jackson-Typ, *J. Approximation Theory* **7** (1973), in press.
4. T. Ganelius, and S. Westlund, The degree of approximation in Müntz's theorem, Proc. Intern. Conference Math. Analysis in Jyväskylä, Finland, August 16–21, 1970.
5. M. v. Golitschek, Jackson-Sätze für Polynome $\sum_{k=0}^{s} a_k x^{\nu_k}$, erschienen in: Abstract spaces and approximation, *Intern. Ser. Num. Math.* **10** (1969), 309–320.

6. M. v. GOLITSCHEK, Die Sätze von Jackson für Polynome $\sum_{k=0}^{s} a_k x^{p_k}$, Dissertation, Würzburg, 1969.
7. M. v. GOLITSCHEK, Generalization of the Jackson approximation theorems in the sense of Ch. Müntz, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 524–528.
8. M. v. GOLITSCHEK, Erweiterung der Approximationssätze von Jackson im Sinne von Ch. Müntz II, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 72–86.
9. W. GRÖBNER AND N. HOFREITER, "Integraltafel II," p. 181, Wien, 1966.
10. D. J. NEWMAN, A Müntz-Jackson theorem, *Amer. Math. J.* **87** (1965), 940–944.
11. R. PALEY AND N. WIENER, "Fourier Transforms in the Complex Domain," pp. 1–13, Amer. Math. Soc., New York, 1934.